

Hong Kong Mathematics Olympiad (2012 / 2013)

Final Event 1 (Group)

香港數學競賽 (2012 / 2013)

決賽項目 1 (團體)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 求 $(2^{13} + 1)(2^{14} + 1)(2^{15} + 1)(2^{16} + 1)$ 的個位數字。

Find the unit digit of $(2^{13} + 1)(2^{14} + 1)(2^{15} + 1)(2^{16} + 1)$.

2. 求 $16 \div (0.40 + 0.41 + 0.42 + \dots + 0.59)$ 的值的整數部分。

Find the integer part of $16 \div (0.40 + 0.41 + 0.42 + \dots + 0.59)$.

3. 從 1、2、4、6、7 中選三個數字組成三位數。這些三位數有多少個能被 3 整除？

Choose three digits from 1, 2, 4, 6, 7 to construct three-digit numbers. Of these three-digit numbers how many of them are divisible by 3?

4. 用 1、2、3、4、5、6 組成一個 6 位數： $ABCDEF$ ，使得： A 能被 1 整除， AB 能被 2 整除， ABC 能被 3 整除， $ABCD$ 能被 4 整除， $ABCDE$ 能被 5 整除，及 $ABCDEF$ 能被 6 整除。求 A 的最大值。

Using numbers: 1, 2, 3, 4, 5, 6 to form a six-digit number: $ABCDEF$ such that A is divisible by 1, AB is divisible by 2, ABC is divisible by 3, $ABCD$ is divisible by 4, $ABCDE$ is divisible by 5 and $ABCDEF$ is divisible by 6. Find the greatest value of A .

Hong Kong Mathematics Olympiad (2012 / 2013)

Final Event 2 (Group)

香港數學競賽 (2012 / 2013)

決賽項目 2 (團體)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 若 $4^3 + 4^r + 4^4$ 是一平方數，其中 r 是正整數，求 r 的最小值。

If $4^3 + 4^r + 4^4$ is a perfect square and r is a positive integer, find the minimum value of r .

2. 三男 B_1, B_2, B_3 和三女 G_1, G_2, G_3 就坐一排座位，並滿足以下兩個條件：

1) 一男不會坐在另一男旁邊及一女不會坐在另一女旁邊

2) B_1 必須坐在 G_1 旁邊

若 s 是這樣就坐的排列數量，求 s 的值。

Three boys B_1, B_2, B_3 and three girls G_1, G_2, G_3 are to be seated in a row according to the following rules:

1) A boy will not sit next to another boy and a girl will not sit next to another girl

2) Boy B_1 must sit next to girl G_1

If s is the number of different such seating arrangements, find the value of s .

3. 設 $f(x) = \frac{x+a}{x^2 + \frac{1}{2}}$ ， x 為實數且 $f(x)$ 的最大值和最小值分別是 $\frac{1}{2}$ 和 -1 。若 $t = f(0)$ ，求 t 的值。

Let $f(x) = \frac{x+a}{x^2 + \frac{1}{2}}$, where x is a real number and the maximum value of $f(x)$ is $\frac{1}{2}$ and the

minimum value of $f(x)$ is -1 . If $t = f(0)$, find the value of t .

4. 如圖一， ABC 是一等腰三角形，其中 $\angle ABC = u^\circ$ ， $AB = BC = a$ 和 $AC = b$ 。若二次方程

$$ax^2 - \sqrt{2} \cdot bx + a = 0$$

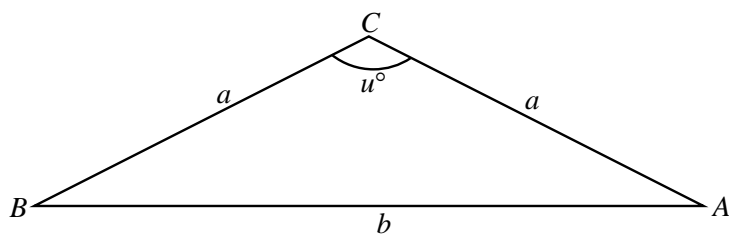
有兩個實根，它們的絕對差為 $\sqrt{2}$ ，求 u 的值。

In Figure 1, ABC is an isosceles triangle with $\angle ABC = u^\circ$, $AB = BC = a$ and $AC = b$.

If the quadratic equation

$$ax^2 - \sqrt{2} \cdot bx + a = 0$$

has two real roots, whose absolute difference is $\sqrt{2}$, find the value of u .



圖一

Figure 1



Hong Kong Mathematics Olympiad (2012 / 2013)

Final Event 3 (Group)

香港數學競賽 (2012 / 2013)

決賽項目 3 (團體)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 若 m 和 n 是正整數且 $m^2 - n^2 = 43$ ，求 $m^3 - n^3$ 的值。

If m and n are positive integers with $m^2 - n^2 = 43$, find the value of $m^3 - n^3$.

2. 設 x_1, x_2, \dots, x_{10} 為非零整數，且滿足 $-1 \leq x_i \leq 2$ 其中 $i = 1, 2, \dots, 10$ 。若 $x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 11$ ，求 $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2$ 的最大可能值。

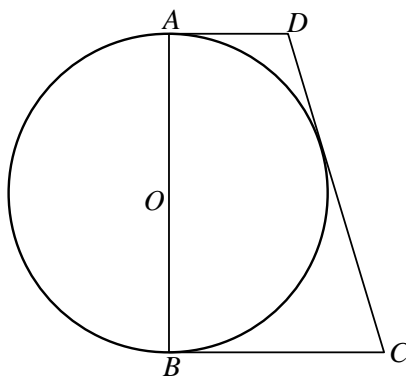
Let x_1, x_2, \dots, x_{10} be non-zero integers satisfying $-1 \leq x_i \leq 2$ for $i = 1, 2, \dots, 10$. If $x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 11$, find the maximum possible value for $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2$.

3. 若 $f(n) = a^n + b^n$ ，其中 n 是正整數且 $f(3) = [f(1)]^3 + f(1)$ ，求 $a \cdot b$ 的值。

If $f(n) = a^n + b^n$, where n is a positive integer and $f(3) = [f(1)]^3 + f(1)$, find the value of $a \cdot b$.

4. 如圖二， AD ， BC 和 CD 是以 O 作圓心且直徑 $AB=12$ 的圓的切線。若 $AD=4$ ，求 BC 的值。

In Figure 2, AD , BC and CD are tangents to the circle with centre at O and diameter $AB=12$. If $AD=4$, find the value of BC .



圖二
Figure 2



Hong Kong Mathematics Olympiad (2012 / 2013)

Final Event 4 (Group)

香港數學競賽 (2012 / 2013)

決賽項目 4 (團體)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 若 P 為整數 3,659,893,456,789,325,678 與 342,973,489,379,256 的乘積，求 P 的位數。

If P be the product of 3,659,893,456,789,325,678 and 342,973,489,379,256, find the number of digits of P .

2. 若 $\frac{1}{4} + 4\left(\frac{1}{2013} + \frac{1}{x}\right) = \frac{7}{4}$ ，求 $1872 + 48 \times \left(\frac{2013x}{x+2013}\right)$ 的值。

If $\frac{1}{4} + 4\left(\frac{1}{2013} + \frac{1}{x}\right) = \frac{7}{4}$, find the value of $1872 + 48 \times \left(\frac{2013x}{x+2013}\right)$.

3. 有一個正整數被 10 除，餘數為 9；被 9 除，餘數為 8；被 8 除，餘數為 7；等等直至被 2 除，餘數為 1。求此正整數的最小值。

The remainders of a positive integer when divided by 10, 9, 8, ..., 2 are 9, 8, 7, ..., 1, respectively. Find the smallest such positive integer.

4. 如圖三， A 、 B 、 C 、 D 、 E 代表不同的個位數字。求 $A+B+C+D+E$ 的值。

In Figure 3, A, B, C, D, E represent different digits. Find the value of $A+B+C+D+E$.

$$\begin{array}{r} ABCDE \\ \times \quad \quad 9 \\ \hline 1AAA0E \end{array}$$

圖三

Figure 3